$A \in M_{m,m}(\mathbb{R}) \quad X \in M_{m,1}(\mathbb{R}),\ B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

$A \cdot X = B \Rightarrow (A^{-1}A)X \Rightarrow id \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1}B$

lezione precedente

SPAZI VETTORIALI (Su $\mathbb{R}$)

V insieme non vuoto con un'operazione +

Se tutte queste condizioni sono vere possiamo chiamare spazio vettoriale l'insieme V

1) $\forall u, v, w \in V \Rightarrow (u+v)+w = u+(v+w)$
2) $\exists 0 \in V$ tale che $0+v = v+0 \quad \forall v \in V$
3) $\forall v \in V\ \exists v'$ tale che $v+v' = 0 = v'+v$
4) $\forall u, v \in V \quad u+v = u+v$

e un'operazione $\cdot$ con R tale che: (λ è uno scalare)

5) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad \lambda \cdot v \in V$
6) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, v' \in V \quad \lambda(v+v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v'$
7) $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad (\lambda+\lambda')v = \lambda v + \lambda v'$
8) $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \forall v \in V \quad \lambda(\lambda' v) = (\lambda\lambda')v$
9) $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$

Esempi:

- $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}$ non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

  $1 \in V,\ \sqrt{2} \in \mathbb{R},\ \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

V è uno spazio vettoriale, $v \in V$ vettore $\lambda \in \mathbb{R}$ scalare

- $\boxed{\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2 \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}}$

$(x_1 \dots x_N) + (y_1 \dots y_N) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\lambda(x_1 \dots x_n) = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n)$

• $\mathcal{E}_0$ soluzione del sistema $A \cdot X = 0$

$\mathcal{E}_0 \subseteq M_{m,1}(\mathbb{R})$

$\mathcal{E}$

$Y, X \Rightarrow A \cdot X = 0 \quad A \cdot Y = 0$

$A(x+y) = Ax + AY = 0+0$

$A(c \cdot x) = c \cdot Ax = c(A \cdot x) = c$

Esempio:

tutti i polinomi di $\mathbb{R}$ di grado al più n

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} e_i x^i \;\middle|\; e_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ovvero tutti i polinomi fino al grado n

$c \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \mathbb{R}[x], \; c \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} c \cdot e_i \cdot x^i$

questo verifica che si tratta di uno spazio vettoriale moltiplicando per uno scalare

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $v_1 \dots v_m \in V$

una combinazione lineare $v_1 \dots v_m$ è una somma

$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m$ con $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Sottospazio vettoriale: V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $W \subseteq V$

quindi W è un sottospazio di V se W con la somma e il prodotto di V è uno spazio vettoriale.

Esempio

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ con tutti i numeri maggiori uguale di 0 non è un sottospazio vettoriale perché la proprietà numero 3 non è valida

$\{0\}$ è uno spazio vettoriale banale

se considerato come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale

$W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se:

1) $\forall v, w \in W$, $v + w \in W$

2) $\forall w \in W$, $-w \in W$

3) $0 \in W$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

W per essere un sottospazio di V deve essere vere queste cose

Proposizione

W sottospazio di $V \Rightarrow$ '$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow$ '$\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in W$'

Dimostrazione esercizio

sottospazio generato da S

numeri naturali

V spazio vettoriale, $S \subseteq V$ $\quad \langle S \rangle \to \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \;\middle|\; \begin{matrix} m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \\ v_i \in S \end{matrix} \right\}$

numero di vettori

Esempio

vettore

$\{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \langle (0,1) \rangle = \{ \lambda(0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

$= \lambda_1 \underbrace{(0, \lambda)} + \lambda_2 \underbrace{(0, \mu)} = (0, \lambda\lambda_1 + \lambda_2 \mu) \Rightarrow (0,1)$

2 qualsiasi vettori generati dal sottospazio $\langle (0,1) \rangle$

$W_1, W_2 \subseteq V$ sottospazi

$W_1 \cup W_2 \to$ è ancora un sottospazi di U?

SPOILER: NO

Esempio: $\langle (0,1) \rangle, \langle (1,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\begin{matrix} \langle (0,1) \rangle & & \langle (1,0) \rangle \\ \| & & \| \\ W_1 & & W_2 \\ \| & & \| \\ \{(0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & & \{(0,\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \end{matrix}$$

$(0, \lambda) + (\mu, 0) = (\mu, 1)$

non rispetta le prime proprietà per essere un sottospazio

$\langle W_1 \cup W_2 \rangle = W_1 + W_2$

Lemma $W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, \, w_2 \in W_2 \}$

$W_1 = \{ (0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

$W_2 = \{ (\mu, 0) \mid \mu \in \mathbb{R} \}$

$W_1 + W_2 = \{ (\mu, \lambda) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

Dimostrazione "$\subseteq$" $w \in W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$

$n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, w_i \in W_1 \cup W_2$

$\forall i = 1 \dots n \quad w_i \in W_1$ o $w_i \in W_2 \Rightarrow$ riordino gli indici e assumo che $w_1 \dots w_k \in W_1, w_{k+1} \dots w_n \in W_2$

$$w = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i}_{W_1} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i w_i}_{W_2} \in W_1 + W_2$$

"$\supseteq$"

$w \in \left\{ w_1 + w_2 \,\middle|\, \begin{matrix} w_1 \in W_1 \\ w_2 \in W_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow w = w_1 + w_2 \Rightarrow w = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$

con $w_i \in W_i \subseteq W_1 \cup W_2 \quad \Rightarrow w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$

possiamo estendere la definizione a famiglie di sottospazi:

$\{ W_i \}_{i \in I_i} \Rightarrow$ famiglia di sottospazi

insieme di indici

$$\underbrace{+_{i \in I_i} W_i = \langle \bigcup_{i \in I_i} W_i \rangle}_{} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i \,\middle|\, \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ w_i \in W_i \end{matrix} \right\}$$

sommatoria

la sommatoria è uguale all'unione di tutti gli elementi W_i con $i \in I_i$

$W_1, W_2 \subseteq V$

$W_1 \cap W_2$ è un sottospazio? SPOILER: Sì

$$W_1 = \{(0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad W_2 = \{(\mu,0) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$$

→ è un sottospazio rispetto a $W_1 \cap W_2$

→ unici elementi comuni

Proposizione

$W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V

Dimostrazione: $u, v \in W_1 \cap W_2$

$$\underset{\underset{W_1}{\cap}}{\overset{\overset{W_2}{\cup}}{\lambda_1 u}} + \lambda_2 \underset{\underset{W_1}{\cap}}{\overset{\overset{W_2}{\cup}}{v}} \in W_1 \cap W_2$$

appartiene ad entrambi perché è un'intersezione

$\{W_i\}_{i \in I}$ $\quad \bigcap_{i \in I} W_i$ è un sottospazio

nomenclatura

$$W_1, W_2 \subseteq V \text{ t.c. } W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

esiste un'unico elemento

somma diretta

Proposizione $w \in W_1 \oplus W_2$ $\exists!\, w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$ tali che $w = w_1 + w_2$

Esempio $W_1 = \langle (1,0,0)(0,1,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

$W_2 = \langle (1,1,0) \rangle$

$W_1 \cap W_2 = \langle (1,1,0) \rangle = W_2$

$W_1 + W_2$ non è una somma diretta perché l'intersezione $W_1 \cap W_2$ non è uguale a $\{0\}$

$$(1,1,0) = (0,0,0) + (1,1,0) = \underbrace{(1,0,0) + (0,1,0)}_{W_1} + \underbrace{(0,0,0)}_{W_2}$$